

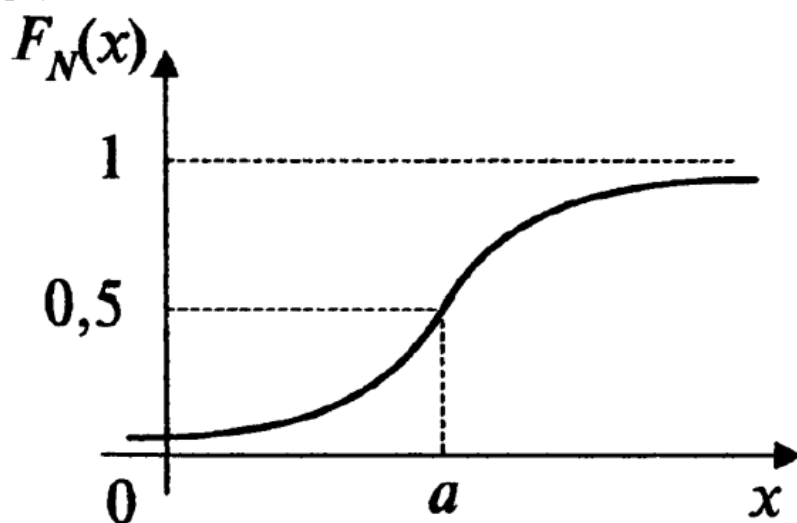
Замечание. Есть некоторая накладка определений:

Есть множество различных распределений. Их логично называть «функциями распределения». Например, функция распределения Гаусса –

$$\varphi_N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Все эти функции есть функции плотности вероятностей, но т.к. часто это функции каких-то распределений, логично называть их функция распределений.

Однако «функцией распределения» на ФФ называют не сами функции, а интеграл от них (вероятность того, что величина окажется меньше, чем аргумент):



Я функцией распределения буду называть именно функцию плотности вероятности такого-то распределения. Если речь идёт именно о первообразной, то буду писать «интегральная функция распределения».

Доверительные оценки.

Разные случаи бывают в жизни. Например, физик-теоретик Юсуп Роберт придумал интересную теорию: а что, если протон и нейтрон – это одна частица, имеющая **одну и ту же массу?** (выделенный текст крайне важен: нейтрон можно рассматривать как «возбуждённое» состояние протона, например, при β^+ протон заменяется на нейтрон, т.е. как бы возбуждается (тратя 1,3 МэВ), а при β^- нейтрон становится протон, снимая возбуждение). Но вот Роберт Юсупов утверждает, что разницы в 1,3 МэВ нет и протон с нейтроном имеют одинаковую массу.

Ему говорят: чел, у протона 938,27 МэВ, у нейтрона 939,57 МэВ, иди-ка ты...

А он: все эти массы как получились? Эээээээ



Ээээээкспериментом. Строились Гауссы, 938,27 и 939,57 МэВ. А может быть, эти Гауссы на самом деле широкие.

Вот на такой случай и нужны доверительные интервалы. Если, скажем, с вероятностью 99% масса протона лежит в интервале (938,26..938,28 МэВ), а нейтрона (939,56...939,58 МэВ), то Юсупа Робертова можно будет послать.

Итак, так как это делается?

Договоримся, что θ будет скаляр, как в данном примере, т.е. нам надо построить доверительный интервал для одного параметра.

Сперва нужно определиться с α , β и γ .

γ – вероятность того, что масса протона попадёт в доверительный интервал. Он обычно берётся 95%. Иногда выше – 99%. Как можно понять, чем больше γ , тем больше будет доверительный интервал.

α – вероятность того, что масса протона окажется меньше левой границы доверительного интервала.

β – вероятность того, что масса протона окажется больше правой границы доверительного интервала.

Величины α , β и γ мы выбираем сами. Ну как сами: γ нам обычно спускают сверху «а определите-ка доверительный интервал, чтобы масса протона лежала в нём с вероятностью 99%». α и β мы вольны выбирать сами, главное, чтобы выполнялось условие $\alpha+\beta+\gamma=1$ (сумма вероятностей должна быть 1).

Например:

Мы выбрали

$\alpha=0,5\%$

$\gamma=99\%$

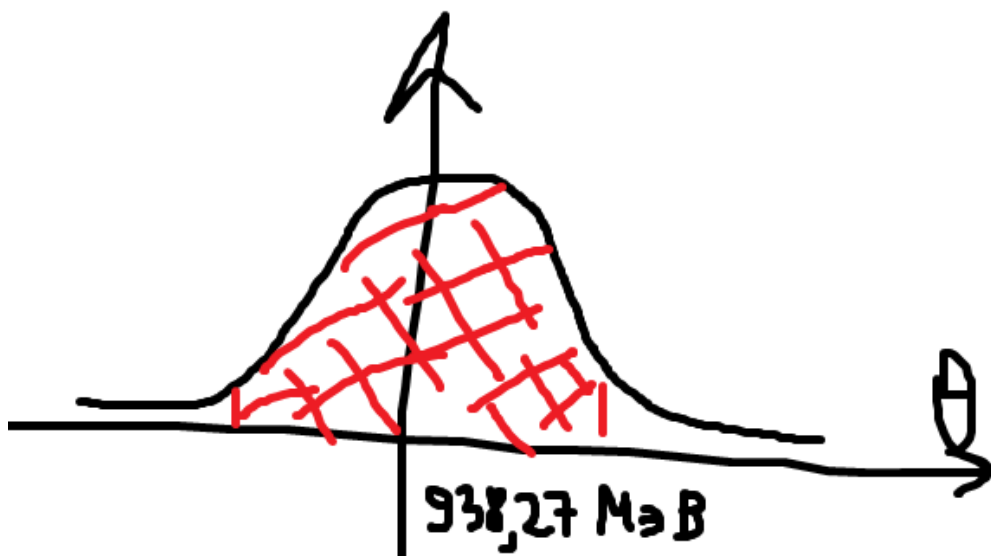
$\beta=0,5\%$

Наша цель – найти верхнюю и нижнюю оценку массы протона, чтобы вероятность того, чтобы масса протона меньше нижней оценки, была 0,5%, и чтобы масса протона была больше верхней оценки, тоже 0,5%.

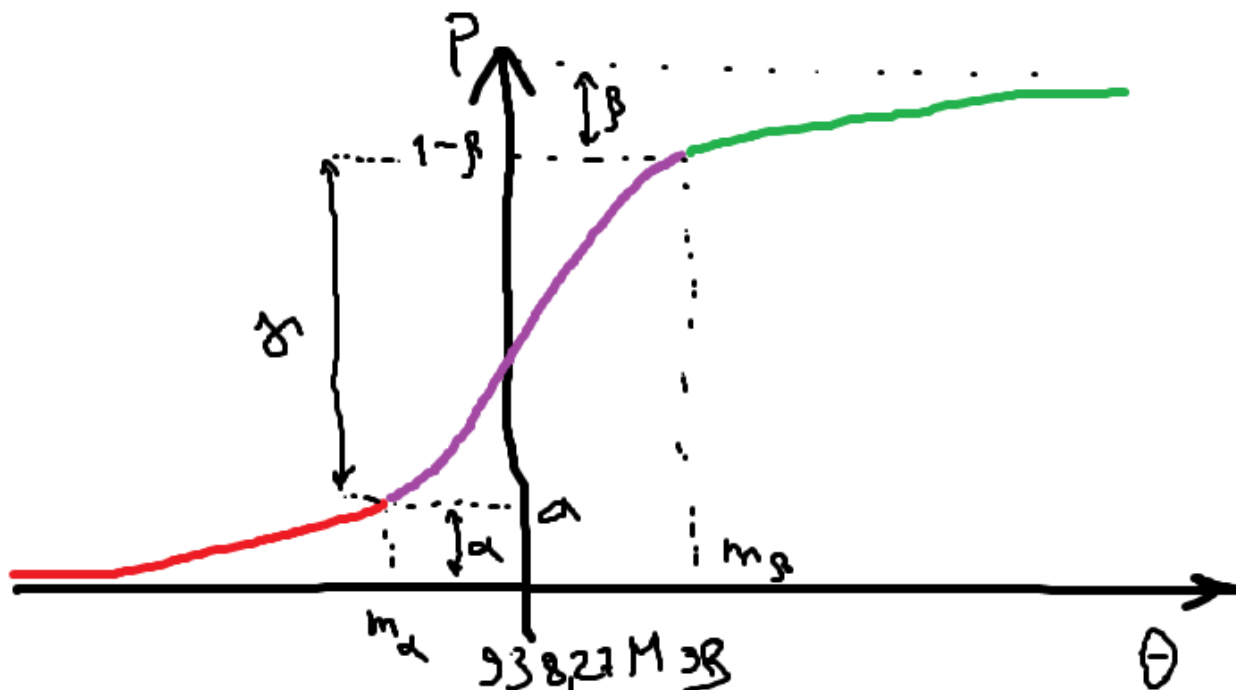
Далее мы соображаем, сколько раз мы измеряли массу протона. Пусть k раз. Тогда строим график распределения Стьюдента k -того порядка.

Почему Стьюдента? Вспомните: это плотность вероятности отклонения экспериментального матожидания от истинного. Ухудшенный Гаусс, но если будет измерений будет много (k большое), то он будет стремиться к Гауссу.

И вот нам нужно, чтобы ошибка уложилась в отведённый вами диапазон:



Чтобы красная площадь (между двумя границами) была γ . А как их найти? Удобнее всего на графике интегральной функции распределения Стьюдента:



- вероятности того, что масса протона окажется θ при заданной выборке

\bar{X} .

Фиолетовый участок – это вероятный интервал длиной γ , т.е. доверительный интервал

Красный участок – это как раз случай, что масса протона окажется меньше левой границы доверительного интервала, вероятность этого α .

Красный участок – это случай, что масса протона окажется больше правой границы доверительного интервала, вероятность этого β .

Мы строим график интегральной функции распределения и определяем, при каких значениях θ мы получаем α и $1-\beta$. Это и будут две границы доверительного интервала.

Чем больше раз вы меряете массу, тем уже Стьюдент (он стремится к Гауссу) и тем круче график его интегральной функции распределения и тем меньше доверительный интервал (и тем точнее вы определяете массу протона).